Mesures de risc i anàlisi de sensibilitat

Arturo Kohatsu
Universitat Pompeu Fabra

Resum

En aquesta presentació donarem una visió general sobre les diferents tècniques de mesura dels riscos financers i comentarem la importància de realitzar aquesta tasca dintre de les entitats financeres. Exposarem diverses tècniques matemàtiques per resoldre problemes relacionats i sobre la utilització de mesures de sensibilitat per mesurar possibles variacions en carteres amb accions i/o opcions.

Aquesta presentació es va preparar conjuntament amb Miquel Montero (Universitat de Barcelona).

1. Introducció

La presència de risc és un component comú a tots els mercats financers i a tota inversió. Per tant, tota institució financera té un nivell de risc associat a les seves operacions. A Espanya aquest risc està encara bastant controlat pel fet que el mercat espanyol és tradicional i conservador en comparació amb mercats més competitius. Amb la competència entre bancs i amb un millor nivell d'informació sobre els productes financers probablement es continuarà amb un desenvolupament ràpid i dràstic del mercat. Per tant, les institucions financeres es veuran obligades a prendre nivells de risc més alts per obtenir beneficis comparables als actuals. Aquesta, entre d'altres raons, fa que l'estudi del risc sigui un tema important dins la recerca acadèmica i estigui dintre dels temes que interessen més a les institucions financeres.

En aquest marc és on s'han de caracteritzar els riscos. Si acceptem que el risc no es pot eliminar totalment podem intentar reduir-lo de manera «acceptable», tot mantenint el rendiment desitjat. Per aquesta raó, s'han desenvolupat diverses metodologies per tractar el problema de la minimització de risc sota restriccions de rendiment o al contrari, la maximització del guany assumint un cert nivell fix de risc. En aquesta presentació comentarem alguns aspectes relacionats amb diverses branques de recerca desenvolupades darrerament en aquestes àrees i les seves aplicacions potencials. Al mateix temps, volem introduir també els matemàtics en la visió general del marc del problema del risc. Per això, abans de continuar amb aquesta línia volem emmarcar millor el problema del risc de manera general. Vegeu, doncs, les figures 1 a 3, així com també les anotacions que hi ha incloses.

A la figura 1 es pot observar l'estructura més important per gestionar el risc en una entitat financera. Aquesta és el Grup de Gestió de Risc, i és la principal responsable que el nivell de risc sigui el que es comunica efectivament als accionistes, i que aquests per tant accepten; a més de vetllar que les decisions relatives a garantir l'esmentat nivell siguin respectades pels diversos departaments de l'entitat. En particular, han d'estar en contacte amb els departaments i deixar constància per escrit d'aquestes comunicacions. Aquest grup gestor de risc ha d'estar format per representants tant del consell d'administració de l'entitat financera, com també de la resta d'estaments d'aquesta: els diferents departaments financers i el grup tècnic d'anàlisi de riscos.

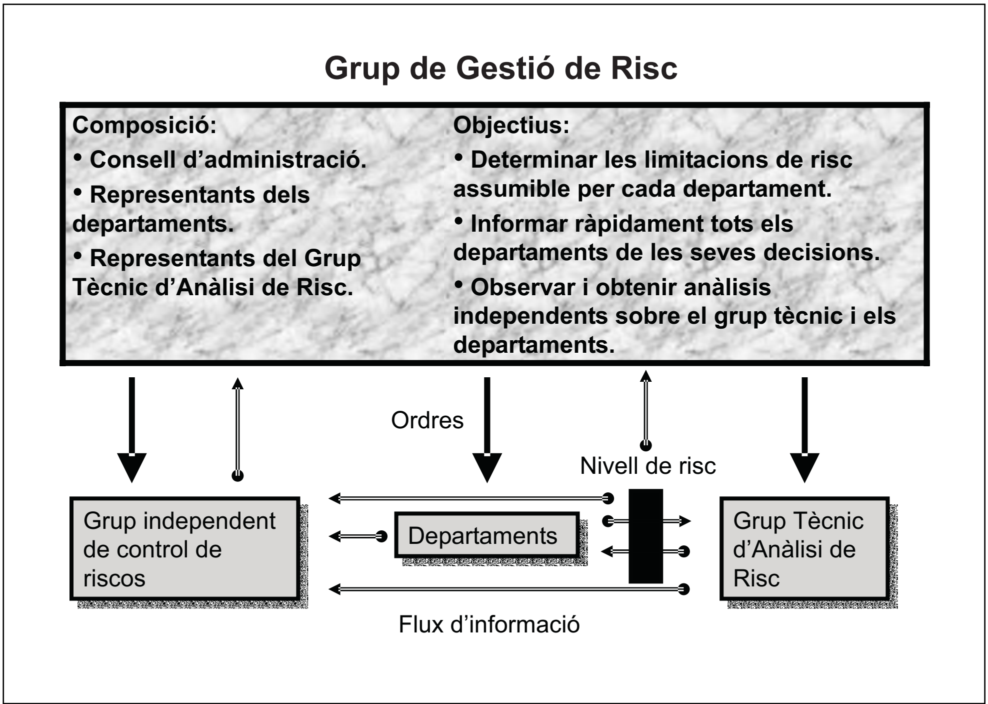

FIGURA 1. Organigrama de l'estratègia global de gestió de risc que hauria de seguir qualsevol entitat financera. L'estament més important en aquest marc és el Grup de Gestió de Risc, una mesa que aplega el consell d'administració de l'entitat, així com també els representants dels diferents departaments i del Grup Tècnic d'Anàlisi de Risc. Els gestors de risc reben informació, doncs, de tots els estaments de l'entitat, a més del nivell actual de risc que aquesta assumeix, i dóna les ordres pertinents per tal de complir les directives prèviament fixades.

Els departaments són, doncs, els encarregats de portar a terme la política financera de l'empresa dictada pel grup gestor de risc. Ells mateixos, però, no han de ser els encarregats de determinar el nivell de risc que s'assumeix en un moment donat. Aquesta és la feina del Grup Tècnic d'Anàlisi de Risc, que ha de desenvolupar la seva tasca per separat dels departaments, fins i tot en el sentit literal del terme, per no tenir cap conflicte d'interessos. Aquest departament tècnic ha de ser capaç de desenvolupar una metodologia d'acord amb la situació global dels diversos departaments, i de manera independent dels objectius de cadascun d'ells, vetllant, però, que els nivells de risc fixats pel grup gestor de risc siguin respectats —vegeu la figura 2.

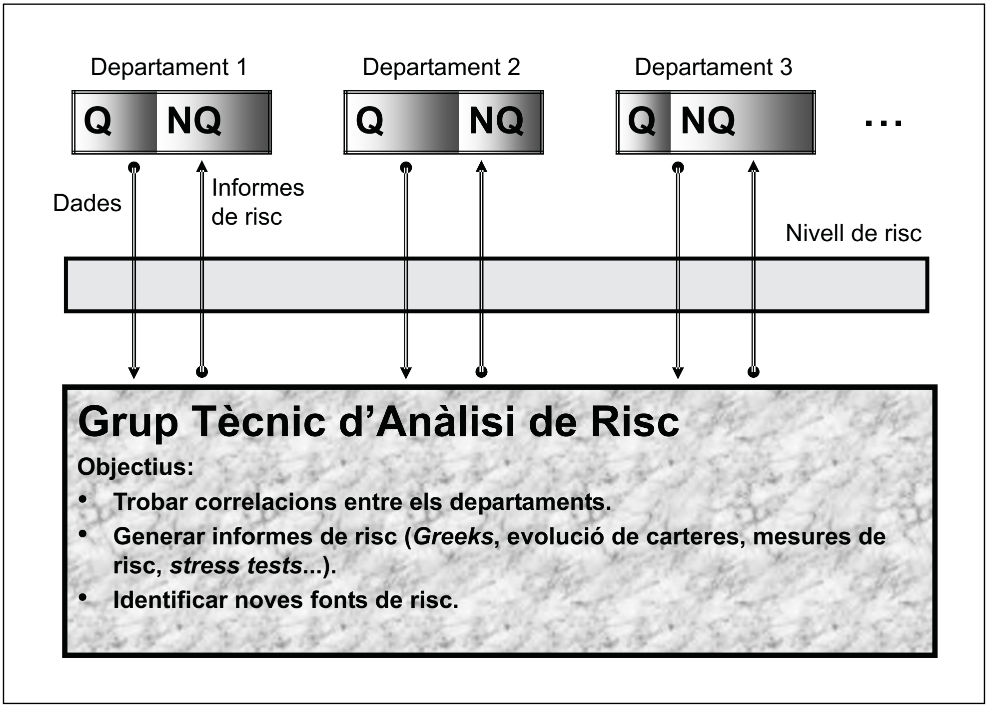

FIGURA 2. Relació dels diferents departaments de l'entitat amb el Grup Tècnic d'Anàlisi de Risc. Cada departament, per la seva banda, cataloga cada factor de risc com a *quantificable* (*Q*) o *no quantificable* (*NQ*). Un cop fet això, pondera el valor de totes aquelles magnituds que ells creuen rellevats i les subministra al grup d'anàlisi de risc. Aquest recull totes les dades provinents del conjunt dels departaments, en demana informació accessòria, si ho creu convenient, i la processa de manera conjunta. Fet això, informa cada departament del risc que està assumint, per tal que corregeixi, si cal, la seva estratègia.

El grup gestor de risc, per tal de tenir una visió independent de la tasca desenvolupada pels departaments i el grup tècnic, també hauria de contractar una empresa auditora externa que observi les relacions entre els departaments i el grup tècnic —vegeu la figura 3. Els informes que aquesta auditora genera, a part de garantir el correcte funcionament actual de l'entitat, hau-

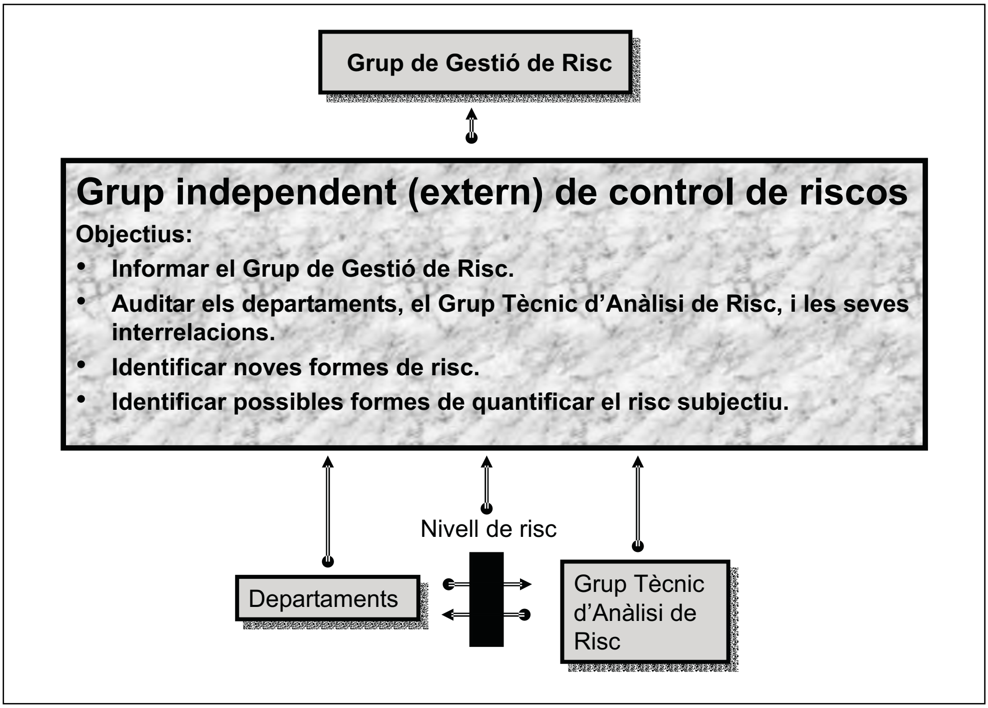

FIGURA 3. El Grup Extern d'Anàlisi de Risc s'encarrega de supervisar l'actuació tant dels diferents departaments i del grup tècnic, com de les respectives interaccions. Elabora propostes alternatives per corregir els possibles defectes que hagi pogut detectar i informa de les seves conclusions el grup de gestors de risc.

rien de servir per portar el model de gestió present fins al grau màxim d'independència en les activitats del grup tècnic i els diversos departaments. Així mateix és una tasca conjunta de tots aquests organismes encarregats en l'administració de risc, la de cercar nous components de risc i la matematització dels riscos, que fins ara es consideren subjectius.

Ara ens centrarem, però, en l'estudi del Grup d'Anàlisi de Risc. Qualsevol sistema per analitzar el risc ha de tenir uns preceptes mínims per evitar de ser «massa optimista» o «massa pessimista». La primera assumpció podria provocar una manca de capital líquid en situacions temporalment adverses, que és el que sovint passa quan no s'ha estimat el risc de manera apropiada. En la segona situació es pot tenir capital inactiu que podria estar generant beneficis, degut a una posició massa conservadora de l'entitat.

Com hem vist, hi ha riscos que són dificils de matematitzar i per tant s'han de considerar de manera subjectiva, fora del marc d'acció del grup d'anàlisi de risc. Aquesta presentació se centrarà doncs a parlar d'aquells que sí que es poden tractar de manera formal. Tot i això, hem d'acceptar que qualsevol enfocament matemàtic/econòmic d'aquests problemes és solament una aproximació i per tant plausible d'errors greus de modelització i de càlcul. Els models matemàtics s'han de fer servir per detectar possibilitats no previstes, o com a eina de corroboració quantitativa de determinades intuïcions. Mai no s'ha de fer servir com a directriu cega de l'administració del risc. Per això, és necessari que el grup d'anàlisi de risc no estigui connectat als respectius departaments d'inversions. Sempre es pot trobar el model numèric adequat que ens deixi fer allò que volem.

D'altra banda no hi ha cap teoria global que ens permeti considerar tots els riscos existents (coneguts o no), com ara el risc de fallida de diverses inversions, el risc de mercat, el valor de risc, el nivell òptim d'inversió i la liquidesa del fons d'inversió; tot plegat al mateix temps. I si ho intentéssim calcular així, el més probable és que obtindríem resultats incongruents.

2. Tècniques d'anàlisi de risc

Els requeriments que es poden fer al grup d'anàlisi de risc dependran de la política dictada pels diferents departaments de la institució financera. Aquests determinen el tipus de problema que s'haurà de resoldre. Per exemple, un problema comú podria ser la tria dels instruments financers que resultin òptims sota diferents criteris. Aquests criteris podrien ser conservadors, si es decideix minimitzar risc en detriment del rendiment, o més arriscats, si es restringeix el risc màxim i s'intenta trobar el rendiment màxim. Totes les aproximacions possibles per resoldre aquests problemes no tenen una manera única d'interpretar-se, i la història econòmica ens diu que hi ha hagut molts exemples en què una optimització indeguda ha portat a resultats desastrosos (casos com ara Long Term Capital Management, Barings, Orange County, etc.).

Per aquesta raó, no solament les entitats financeres sinó també els governs estan interessats a implantar sistemes de defensa en contra del risc exagerat. A més s'intenta exigir que el risc estigui assegurat d'alguna manera. Així ens trobem amb regulacions tals com les suggerides per la Comissió de Basilea (1996, 1999). En general, aquestes recomanacions permeten que cada entitat financera proposi el seu propi model de gestió de risc. D'acord amb determinades proves sobre l'efectivitat d'aquest model, l'entidad reguladora determina un factor multiplicador a la quantitat de risc donada per l'entitat financera, que ha de estar d'acord amb l'eficiència del model. Entre les filosofies rellevants per mesurar el risc es troben:

2.1. *Modelització paramètrica del subjacent*

En aquesta filosofia s'intenta modelitzar els subjacents que generen el risc mitjançant algun model paramètric, com és el cas del moviment brownià geomètric, i altres de les seves variacions (per exemple els models de volatilitat estocàstica). A partir d'ells es poden obtenir magnituds que mesuren el risc. La forma explícita en què aquestes quantitats són avaluades pot ser tant a través del càlcul analític directe com mitjançant l'aplicació de tècniques de simulació, com ara els mètodes de Monte Carlo, quan la primera via no és factible, o simplement és massa complicada.

2.2. *Simulació històrica*

Es fan servir únicament dades anteriors de l'evolució dels elements en la cartera, sense recolzar-se en cap marc teòric, per simular possibilitats futures. Moltes vegades en inversions no tradicionals és difícil que aquest mètode doni resultats significatius, donat que no hi ha prou dades, o no hi ha hagut suficient comportament extrem per saber quines podrien ser les situacions a protegir.

2.3. Stress testing *o escenaris de crisi*

Aquesta filosofia proposa estudiar el comportament de la cartera en situacions límit. Per aquesta raó, s'han de fer servir dades històriques per intentar trobar situacions límit. En aquest escenari no és bo suposar que les situacions límit del passat no es tornaran a donar, més aviat al contrari. Per això, es fan servir distribucions amb cues pesades o relacionades amb la distribució dels valors extrems. Tot i que de vegades pot resultar massa pessimista en algunes situacions, en altres pot arribar a ser molt realista. Aquest problema va ser un dels components importants en la fallida de LTCM. Sembla que l'estratègia d'aquesta entitat financera consistia a maximitzar rendiments sota restriccions de volatilitat en condicions gaussianes. Precisament els esdeveniments que, en principi, tenien probabilitat massa petita per ocórrer són els que van portar la fallida d'aquest fons d'inversió.

2.4. *Mesures dinàmiques de risc*

Totes les mesures anteriorment proposades són estàtiques, en el sentit que es fan servir horitzons fixos de temps. Per exemple, conèixer que el nivell de risc a una setmana té un cert valor, no ens diu res sobre l'evolució del risc al llarg d'aquesta setmana. Així, darrerament s'intenten trobar optimitzadors que considerin les possibles influències futures en l'evolució de la nostra cartera per tal d'obtenir un millor control, si acceptem la dinàmica del subjacent. Aquesta visió va d'acord amb el fet que els resultats dolents tenen tendència a acumular-se i, per tant, de vegades la fallida de l'estimació del risc estàtic no prové de les condicions de mercat adverses, sinó d'errors en el sistema de modelització.

En resum, la mesura de risc estàtica no permet preveure el comportament persistent de les condicions adverses, mentre que una de dinàmica sí.

3. Mesures paramètriques de risc

Ens centrarem, a partir d'ara, a exposar amb més profunditat algunes mesures de risc associades al que hem descrit al primer punt de la secció anterior com a models paramètrics. En general, denotarem el temps present per t (en dies) i per $VR(t)$ la mesura de risc calculada pel grup de anàlisi de risc. Aquesta magnitud es calcula sovint amb un horitzó curt (per exemple, un dia) pel conjunt de departaments de l'entitat. En aquesta situació la comissió de Basilea recomana fer servir

$$MR(t) = \text{màx}\left(\frac{k}{60} \sum_{i=1}^{60} VR(t-i), VR(t) \right),$$

com a la mesura de risc a curt termini a utiltzar per l'entitat financera, amb $k \geq 3$, per determinar. Si l'horitzó que cal considerar és més d'un dia (diguem-ne τ) es pot fer servir la regla de multiplicar l'anterior quantitat per $\sqrt{\tau}$. El valor de k el fixa l'ens regulador segons la bondat del model utilitzat per l'entitat per determinar la mesura de risc $VR(t)$. Sovint el valor de k es determina mitjançant un càlcul estadístic sobre la quantitat de violacions del MR de l'entitat financera. Aquest valor pot estar influenciat també per la qualificació creditícia de l'entitat. Usualment de 3,4 a 3,85 és el rang corresponent a bancs amb una quantitat moderada de violacions. Entre les mesures de risc VR trobem:

3.1. *VaR*

Sigui $X(t)$ el valor de la cartera a l'instant t. Si volem calcular el VaR en un nivell α per a un horitzó $t+\tau$, hom ha de calcular $VaR(X, \alpha) \in \mathbf{R}_+$ de tal manera que

$$P_t\big(X(t+\tau) - X(t) < -\ VaR(\alpha)\big) = \alpha$$

Comunament $\alpha = 0{,}01$, $0{,}05$. Aquesta mesura ignora doncs les pèrdues màximes, i solament considera les pèrdues mínimes amb un determinat nivell de confiança. Tampoc no considera la dinàmica del subjacent i així mateix s'utilitza sovint amb models paràmetrics.

Aquest mètode està clarament relacionat amb el mètode d'optimització de carteres de Markowitz, un mecanisme d'optimització del rendiment promig, sota restriccions imposades sobre de la variància de la cartera. Val a dir que amb aquesta metodologia, que és més una estratègia d'inversió que de protecció de riscos, és difícil saber quin pot ser el comportament exacte de la cartera, donat que el resultat solament s'expressa en termes de mitjanes i no de possibilitats actuals —vegeu la figura 4.

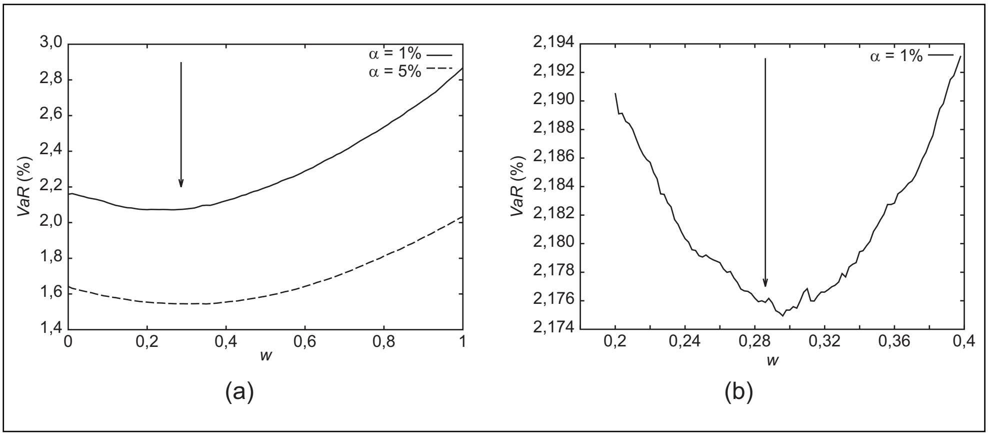

FIGURA 4. Risc associat en una cartera $Z(t)$, constituïda per dos actius, $X(t)$ i $Y(t)$, segons $Z(t) = p \cdot X(t) + q \cdot Y(t)$, en funció de la proporció relativa w, $p = (1 - w) \cdot Z(t) / X(t)$, $q = w \cdot Z(t) / Y(t)$. La fletxa marca la composició òptima de Markowitz ($w = 0{,}286$). El resultat és similar als obtinguts seguint els criteris marcats pel *VaR*, però no idèntic, donat que aquests depenen del valor que pren α, i l'altre no. L'exemple correspon a un moviment brownià geomètric de dues dimensions, amb distribució conjunta lognormal bivariada de paràmetres $r_x = 6$ %, $\sigma_x = 16$ %, $r_y = 10$ %, $\sigma_y = 20$ %, $\rho_{xy} = 50$ % i $\tau = 1$ dia.

Hem de notar que tant els mètodes basats en l'anàlisi de la covariància, com el mateix *VaR*, esdevenen una pobra mesura de risc quan es tracta de ponderar l'exposició associada a instruments que depenen de manera no lineal dels subjacents (aviat parlarem sobre aquest tema amb més detall), com és el cas de les opcions, futurs, bons o altres derivats; o quan aquells, en general, no segueixen una distribució multivariant el·líptica. Aquest és un dels factors d'error més important. Per exemple, només quan es dóna aquesta circumstància, en què la distribució conjunta dels subjacents és el·liptíca, com en el cas reflectit a la figura 5, és certa la propietat de subaddició del *VaR*,

$$VaR(X + Y) \leq VaR(X) + VaR(Y) ,$$

que porta a la diversificació de carteres com a mecanisme universal de reducció de risc.

De manera paral·lela, el càlcul del *VaR* es complica enormement en el cas d'un derivat qualsevol, on la cotizació del subjacent repercuteix de manera complexa en el seu valor. Per alleugerir aquest problema es fan servir aproximacions, de primer o segon ordre, o altres mesures alternatives de risc com la que presentarem en la secció següent —vegeu més avall les figures 6 i 8.

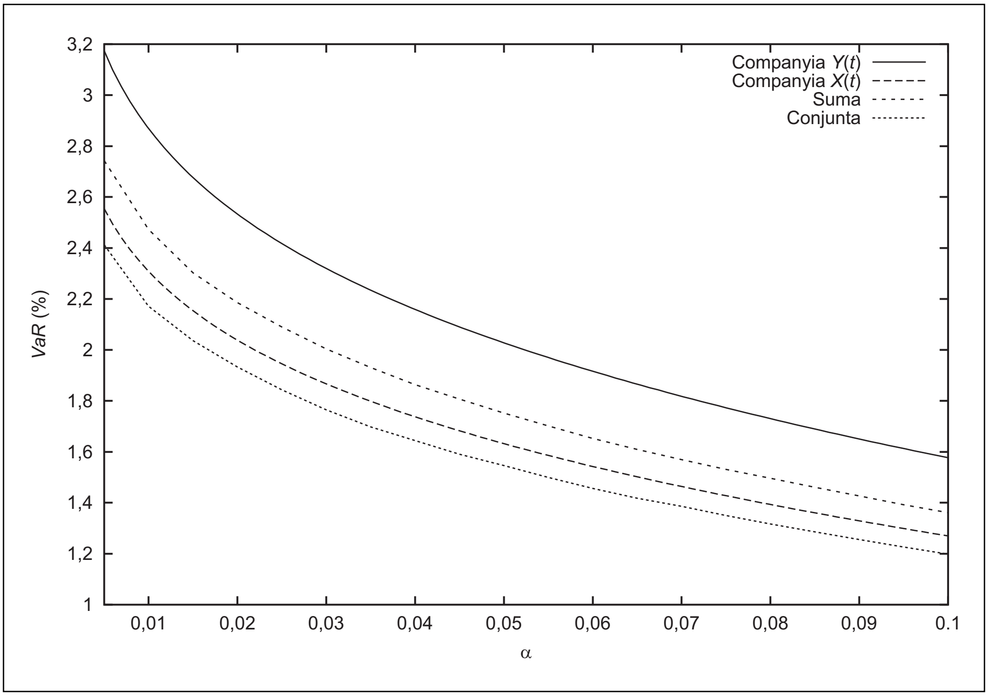

FIGURA 5. Exemple on queda de manifest la propietat de subaddició del *VaR* per distribucions el·líptiques. Els paràmetres mantenen els valors reportats a la figura 4, i per la composició de la cartera s'ha triat el w òptim segons el criteri de Markowitz, $w = 0{,}286$. En aquest cas, s'observa com la suma (ponderada) de riscos d'una cartera mixta de X i Y, seria un compromís entre els nivell de risc de cadascun dels subjacents per separat, mentre que el *VaR* conjunt és inferior al corresponent a la cartera més segura, tot i que els actius estan correlacionats *positivament*.

3.2. *Mean excess function*

Aquesta mesura considera en promig el valors de les pèrdues condicionades a pèrdues mínimes. És sovint una mesura que es pot considerar massa pessimista i no permet l'administració del risc quan es fan servir certes distribucions extremes. En contrast, aquesta mesura té propietats naturals de risc encara que les distribucions dels elements en la cartera siguin no el·líptiques. La seva definició és doncs:

$$- E(X(t) \mid X(t) < -u) \; .$$

Donat que aquesta funció tendeix cap a l'infinit quan $u \to +\infty$, una forma possible de fer comparacions d'una manera justa, entre el resultat obtingut amb la *mean excess function* i amb altres mètodes, és fixar el valor de *u* com el corresponent a un nivell del *VaR* donat, com fem a la figura 6. Aquesta mesura de risc compleix els requeriments de *coherent risk measure* definida fa poc per Artzner *et al.*, tot i que la distribució del subjacent no sigui el·líptica. La generalització d'aquest concepte és el que exposem tot seguit.

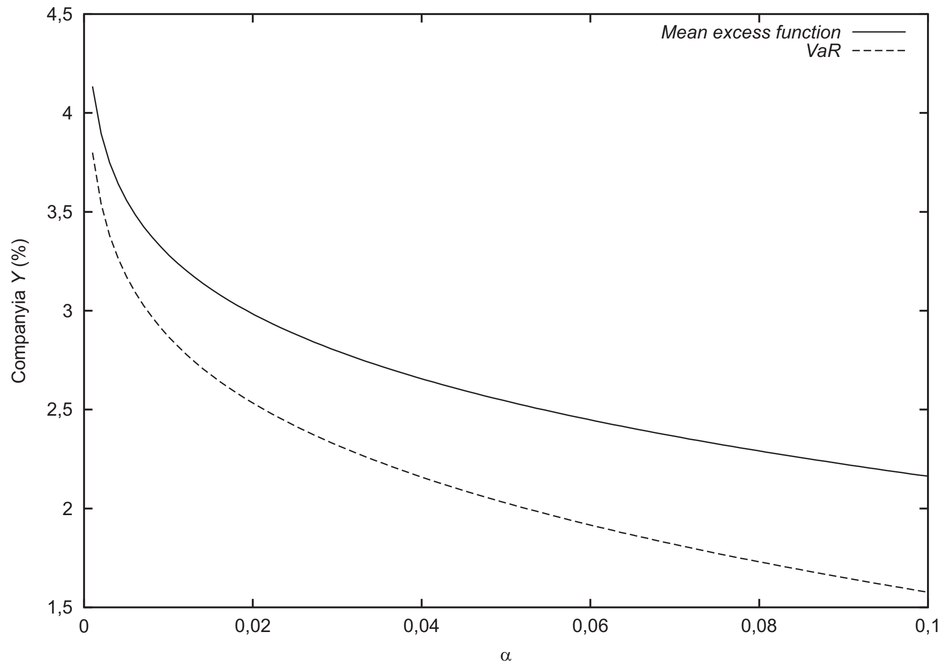

Figura 6. Comparativa de les mesures de risc *VaR* i *mean excess function*, aplicades a l'actiu *Y* abans presentat, per diferents nivells de confiança. Notem com totes dues convergeixen per a valors petits de α, propietat que es deriva del fet que, quan *Y* segueix una distribució lognormal, les pèrdues màximes estan fitades.

3.3. *Convex measures of risk*

Aquestes són classes de mesures de risc recentment introduïdes per Artzner *et al.*; Föllmer i Schied; Karatzas i Cvitanić; entre d'altres. Les seves propostes són les d'escollir una funció d'utilitat i/o un model de subjacent (el·líptic) que mesuri el risc sota determinades propietats bàsiques. Una de les més importants és la convexitat que promou la diversificació de les carteres, propietat que el *VaR* no sempre té, com ja hem dit. Per tant, aquesta tècnica darrera no necessàriament promourà la diversificació de carteres si és utilitzada cegament com a única mesura de risc.

4. Models de subjacent

En aquest apartat discutirem sobre els models paràmetrics possibles per estudiar els riscos de diversos instruments financers. Òbviament el primer model en què tots pensem és:

4.1. *El model lognormal introduït per Black, Scholes i Merton*

Aquest és el model més estès en les seves aplicacions a *VaR*, donada la seva simplicitat i la fàcil interpretació econòmica dels seus paràmetres.

4.2. *Models de cues pesades*

Aquests són models estàtics que recentment s'han estès fins a models continus, i que consideren distribucions amb funcions de densitat on les cues són més grosses que les de la normal. Exemples d'aquest tipus són la distribució hiperbòlica, les estables, etc. Una crítica generalitzada d'aquests models és que molts dels seus paràmetres no tenen cap interpretació econòmica. Moltes vegades els canvis en els valors estimats dels paràmetres no donen tampoc cap informació interpretable des del punt de vista econòmic. D'altra banda, són models que descriuen millor el comportament de les dades històriques dels subjacents.

4.3. *Models amb salts*

Aquests són models que poden tenir relació amb els de l'apartat anterior, amb la diferència que aquests es poden fer servir per modelitzar també els salts inherents als mercats. Els principals problemes en aquests models són: la manca de completesa (objectiu actual d'estudi de diversos investigadors) i l'estimació estadística d'una quantitat alta de paràmetres, cosa que els fa poc tractables, ara per ara, des del punt de vista pràctic.

4.4. *Models de valors extrems*

Aquests són també models amb distribucions estàtiques, que s'obtenen d'analitzar la distribució dels valors extrems. Es poden considerar com a models que seveixen per portar a terme estudis per a escenaris de crisi.

4.5. *Models economètrics (GARCH i les seves variants)*

Aquests són models on el temps és discret, i que han estat desenvolupats principalment per econometristes, i que són molt populars perquè arriben a reproduir el comportament persitent de la volatilitat. Serveixen, per exemple, per desenvolupar mesures dinàmiques de risc, encara que és díficil de trobar un sentit estrictament matemàtic a les afirmacions que es fan servir en desenvolupar aquestes tècniques. Aquests models també són incomplets, en general.

4.6. *Models de volatilitat estocàstica*

Aquests models continus poden representar també el comportament persistent de la volatilitat, com en el cas dels models GARCH. El problema és que els càlculs són en general tan difícils com en el cas GARCH, excepte en casos molt específics. El mercat també aquí esdevé incomplet.

5. ***VaR* per a opcions**

Òbviament es poden considerar carteres amb més o menys risc d'acord amb els criteris establerts per la direcció de l'entitat financera. Encara que darrerament les carteres amb riscos alts s'intenten evitar, sempre és bo considerar la possibilitat de guanys més alts, a canvi, això sí, de l'acceptació de més risc. Aquesta és una de les caracteristíques pròpies de les opcions.

Una opció de tipus *call* europea és un contracte que paga a un temps fix T, la diferència entre el preu del subjacent (que suposarem que segueix un procés brownià geomètric) amb un preu establert en el contracte, anomenat preu d'exercici. La valoració teòrica d'aquests contractes es fa mitjançant una mesura equivalent de martingales Q, que dóna la fórmula de Black-Scholes:

$$V(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} E_Q [(S(T) - K)_+ \mid S(t)] = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \ .$$

Aquí podríem donar un exemple de reinterpretació d'opcions com a aplicació a problemes d'altres tipus. Per exemple, és possible analitzar inversions directes en empreses com si fossin opcions. El preu d'exercici esdevé la inversió inicial, el preu de l'opció és el valor actual de la inversió i el subjacent és el procés de valor del producte produït. Així doncs, encara que la consideració d'una cartera d'opcions sembli restrictiva no es pot menysprear el rang d'aplicacions possibles.

Si $V(t, S(t))$ denota el preu d'aquesta opció a temps t, el canvi de valor d'aquesta opció està donat per

$$e^{-r\tau} V(t+\tau, S(t+\tau)) - V(t, S(t)) \ ,$$

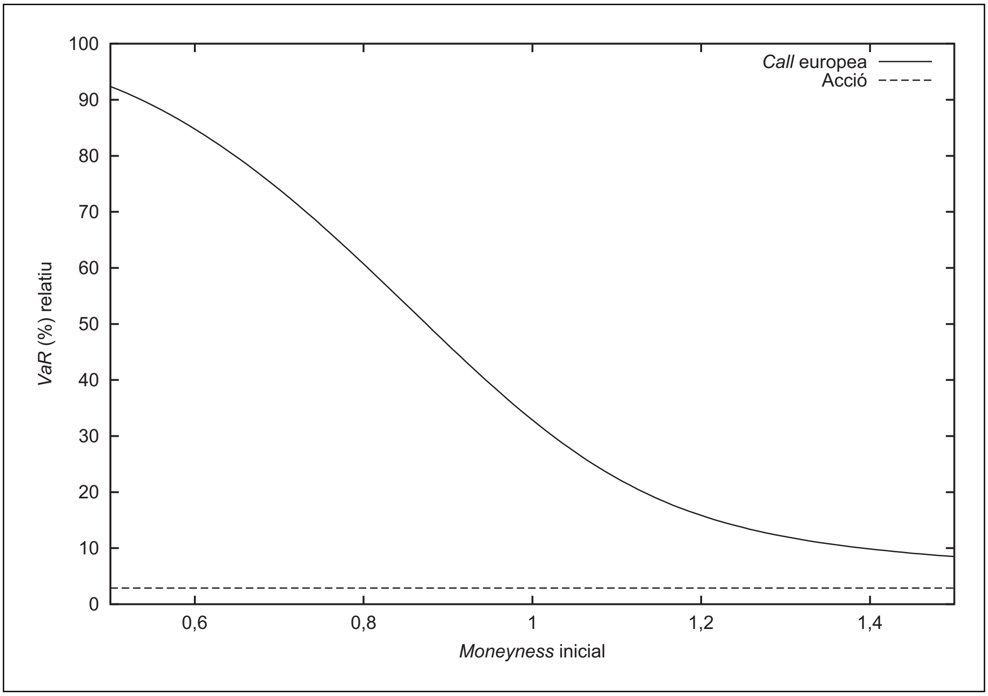

FIGURA 7. Valor del *VaR* per a una opció de compra europea (*call*), relatiu al seu valor actual, en funció de la *moneyness*, $S(t)$ / K, si el subjacent segueix una distribució lognormal amb r = 5 %, σ = 20 %, T = 3 mesos, τ = 1 dia i α = 0,01. Amb el propòsit de ponderar la magnitud de risc que estem disposats a assumir en incloure opcions a la nostra cartera, indiquem també el nivell de risc corresponent a la pròpia acció (on la *moneyness* no juga cap paper).

que és funció de $S(t)$ però de manera no lineal. De fet molts paquets estàndards, com ara RiskMetrics, no funcionen bé amb aquestes no-linealitats. Donat això moltes vegades es fan servir aproximacions de primer i segon ordre, per exemple

$$\frac{\partial V(t,S(t))}{\partial S(t)}(S(t+\tau)-S(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(t,S(t))}{\partial S(t)^2}(S(t+\tau)-S(t))^2.$$

Aquí fitem el canvi en el preu de l'opció en termes de les gregues (derivades del preu) Delta i Gamma. Aquesta és essencialment una aproximació, o bé lineal, o bé quadràtica, del canvi del preu de l'opció, segons si considerem només el primer terme, o tots dos. Com que tractem amb aproximacions, òbviament no obtindrem resultats exactes, encara que així simplifiquem molt els càlculs. Així per exemple, obviem els canvis relacionats directament amb la variable t.

Al mateix temps ens hem d'adonar que aquests canvis s'han de calcular per una quantitat

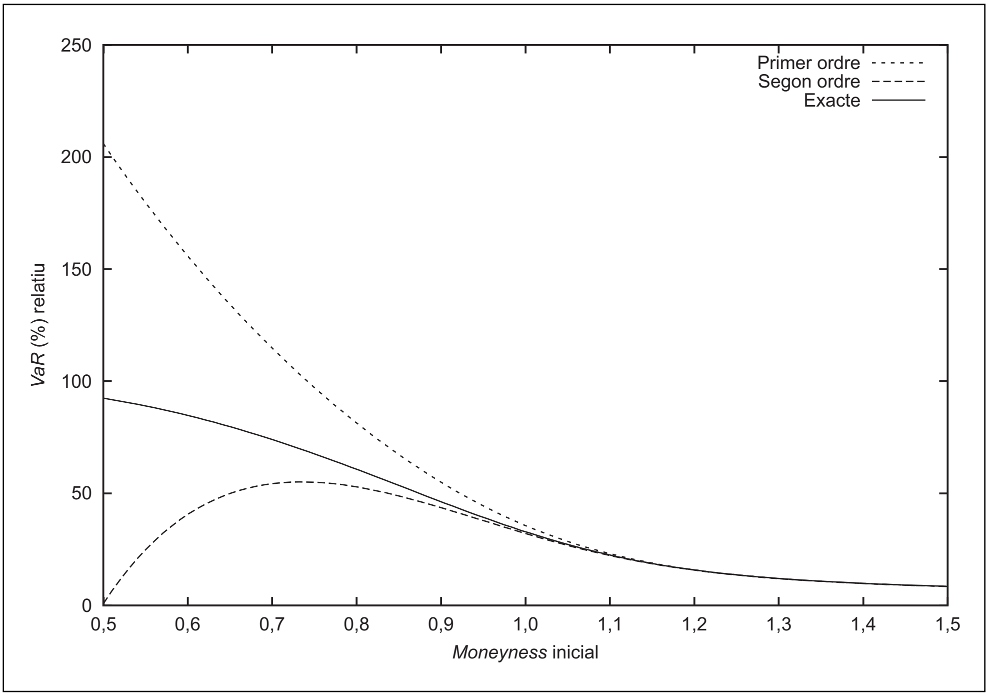

FIGURA 8. Comparativa del resultat obtingut amb diferents aproximacions en el càlcul del *VaR* per a una opció europea (de les mateixes característiques de la que hem presentat a la figura 7). En aquest cas, el resultat es pot obtenir de manera algebraica, i també està representat a la gràfica. Com és notori les aproximacions valoren raonablement bé el risc quan l'opció està *in the money*, és a dir quan $S(t) > K$, però empitjoren notablement quan entrem en la zona *out of the money*, on es pot arribar a pronosticar una pèrdua superior al capital invertit, cosa que és del tot impossible en aquest cas.

molt gran d'opcions i de manera ràpida. Per això es fan servir aquestes aproximacions encara que moltes vegades amb una inversió prèvia de temps es podria millorar molt l'estimació.

Si comparem el risc d'una opció *call* amb el del subjacent, valorats en unitats monetàries invertides, es veu (figura 7) que el risc és gran quan la *moneyness* ($S(t)$ / K) és petita. És a dir, quan és molt possible que perdem el 100 % de la inversió feta. En canvi, el risc tendeix cap al del subjacent quan la *moneyness* és gran.

En la figura 8 trobem el canvi relatiu (a unitats monetàries invertides) d'aquestes aproximacions en comparació al càlcul real per a la *call* europea. Podem observar que les aproximacions considerades es comporten malament per a valors de *moneyness* baixos.

Entre altres gregues, que hem estudiat darrerament, es troba la definició de l'índex Vega local. Aquesta extensió de l'índex Vega ens dóna una mesura dels possibles punts on el model del subjacent pot ser susceptible de canvis dràstics. Dit d'una altra manera, l'índex Vega local ens dirà quan un model que sembla seguir un cert patró pot canviar de règim, i la magnitud d'aquest canvi. Matemàticament es mesura mitjançant el concepte de derivades de Fréchet. Per exemple, considerem el cas de l'opció asiàtica «europea»:

$$V\left(t, S(t), \int_0^t S(s)ds\right) = e^{-r(T-t)} E_Q\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(s)ds - K\right)_+ | F_t\right].$$

Aquesta opció compara el valor mig del subjacent al llarg de tot el període T amb el preu d'exercici K (en aquest sentit, el que direm també està relacionat amb *basket options* en general). Suposem que el model del subjacent és el brownià geomètric amb una perturbació de la volatilitat mesurada per $\varepsilon\hat{\sigma}(t, S(t))$. Aquí ε denota el grau de pertorbació que el model té i $\hat{\sigma}$ la direcció d'aquesta pertorbació. L'índex Vega local denotat per $\mu(t, S(t), \int_0^t S(s)ds)$ mesura a temps t, amb $S(t)$ i $\int_0^t S(s)ds$ coneguts, els possibles canvis en el preu de l'opció. La figura 9 es pot interpretar dient que la regió on l'índex Vega local pren el valor màxim és on el preu de l'opció pot canviar dràsticament. Aquesta és la regió on hem de tenir més cura davant la possibilitat de canvis en el model estructural.

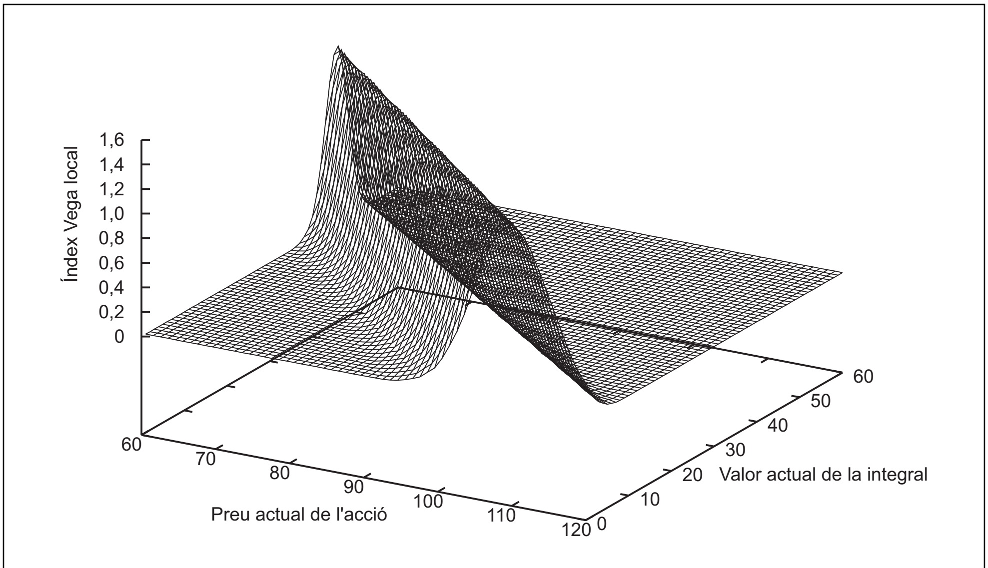

FIGURA 9. Estimació del valor de l'índex Vega local per una acció asiàtica ($r = 5$ %, $\sigma = 20$ %, $K = 100$, $T = 0{,}20$ anys) lluny del moment d'expiració del contracte ($t = T/4$), en funció del valor actual de l'actiu, $S(t)$, i de la integral, $\frac{1}{T}\int_0^t S(s)ds$. La zona de sensibilitat màxima segueix una recta en aquestes variables.

Aquesta regió (vegeu la figura 10) està determinada pel valor del preu d'execució efectiu $(K - \frac{1}{T}\int_0^t S(s)ds) / S(t)$, i sembla que mostra el seu màxim sobre la recta

$$\frac{K-\frac{1}{T}\int_0^t S(s)ds}{S(t)}=1-\frac{t}{T} \ .$$

Aquest és un resultat lògic (que sembla ser veritat amb robustesa sobre el model del subjacent) si es pensa que la regió més crítica és la que es troba al voltant de *K* quan el mercat decideix el pagament o no de l'opció.

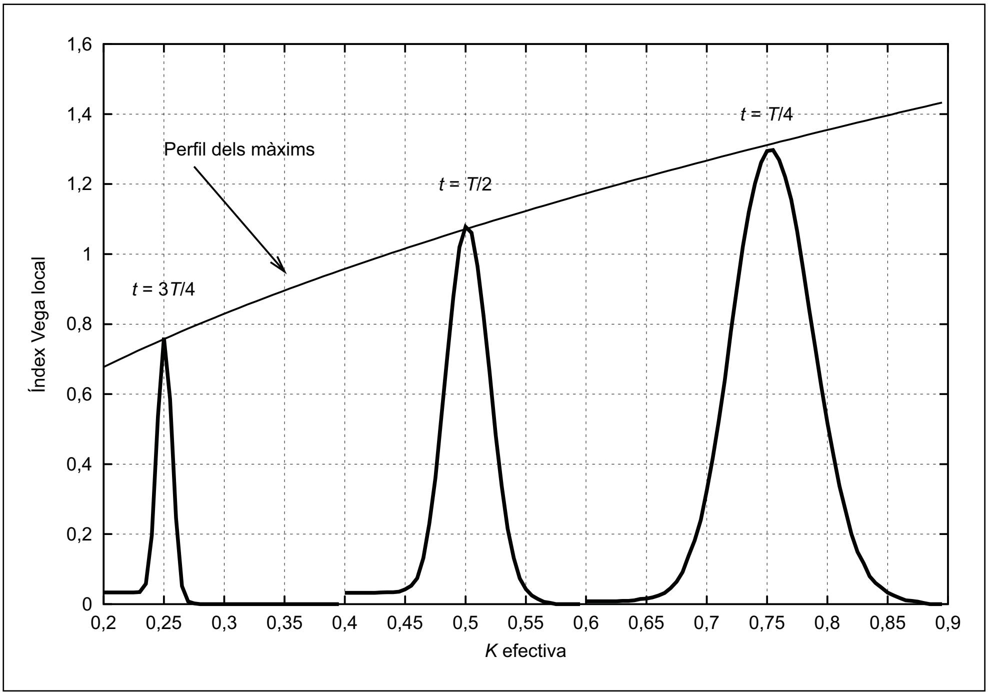

FIGURA 10. Evolució del perfil de l'índex Vega local, en termes del valor efectiu de K, $(K-\frac{1}{T}\int_0^t S(s)ds)$ / / $S(t)$, per diferents moments de la «vida» de l'opció asiàtica descrita a la figura 9. Notem com la zona crítica s'aplega al voltant de $1-t/T$, a més de minvar a mesura que ens acostem al temps d'execució, *T*.

6. Conclusions

Hem donat una visió general sobre la gestió de risc i hem provat de donar una introducció a les diverses línies de recerca que s'estan desenvolupant al voltant de l'anàlisi de risc. En particular, hem descrit les propietats del *VaR* i d'altres mesures de risc. En el cas de les opcions hem descrit el problema de la no-linealitat dels preus i les possibles conseqüències d'aquests errors de càlcul. Així mateix hem introduït l'índex Vega local, hem descrit la manera que s'ha d'interpretar i les seves possibles utilitats. En general, creiem que la recerca en matemàtica financera és una àrea que s'ha de potenciar donada la importància que tindrà, en un futur proper, la gestió de riscos cada vegada més complexos. Òbviament tindrà dues vessants, una molt més matemàtica, que en principi pot semblar de càracter purament teòric, però que després i a llarg termini pot servir per a desenvolupaments més aplicats. Per exemple, la teoria de mercats incomplets és una tècnica de valoració que s'ha desenvolupat en els darrers quinze anys, i que en un principi es va pensar que era una teoria matemàtica gairebé sense resultats financers interessants. De fet, aquesta teoria va arribar a la conclusió que en un mercat incomplet els preus de les opcions podrien tenir un rang de valors on s'arribés fins al mateix preu del subjacent.

En aquests darrers anys, s'ha comprovat que aquesta teoria potser servirà per valorar les opcions amb riscos acceptables. És a dir, la valoració de contractes amb un component més característic de les opcions, i un altre més propi de les assegurances. Aquest és el cas de les opcions en el mercat enèrgetic i/o les opcions climàtiques.

7. Agraïments

MM ha estat parcialment finançat per la Dirección General de Proyectos de Investigación sota contracte núm. BFM2000-0795, i per la Generalitat de Catalunya sota contracte núm. 2001 SGR-00061.

8. Bibliografia

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J. M.; HEATH, D. (1999). «Coherent measures of risk». *Mathematical Finance*, 9, p. 203-228.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION. (1999). *Credit risk modelling: Current practices and applications* <http://www.bis.org/publ>.

BERMIN, H. P.; KOHATSU-HIGA, A.; MONTERO, M. (2002). *Local Vega index and variance reduction methods*. [Preimpressió].

BUCHINSKY, M. (1995). «Estimating the asymptotic covariance matrix from quantile regression models: A Monte Carlo study». *Journal of Econometrics*, 68, p. 303-338.

EMBRECHTS, P.; RESNICK, S.; SAMORODNITSKY, G. (1999). «Extreme value theory as a risk management tool». *North American Actuarial Journal*, 3, p. 30-41.

FÖLLMER, H.; LEUKERT, P. (1999). «Quantile hedging». *Finance and Stochastics*, 3, p. 251-273.

— (2000). «Efficient hedging: Cost versus shortfall risk». *Finance and Stochastics*, 4, p. 117-146.

FÖLLMER, H.; SCHIED, A. (2002). *Convex measures of risk and trading constraints*. [Preimpressió].

GOURIEROUX, C.; LAURENT, J. P.; SCAILLET, O. (2000). «Sensitivity analysis of Values at Risk». *Journal of Empirical Finance*, 7, p. 225-245.

JORION, P. (1997). *Value at Risk*. McGraw-Hill.

MADAN, D. B.; SENETA, E. (1990). «The variance Gamma (V. G.) model for share market returns». *Journal of Business*, 3, p. 511-524.

MASOLIVER, J.; MONTERO, M.; PERELLÓ, J. (2001). *Return or stock price differences*. [Preimpressió].

MCNEIL, A. J.; FREY, R. (2000). «Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach». *Journal of Empirical Finance*, 7, p. 271-300.

RYDBERG, T. H. (1999). «Generalized hyperbolic diffusion processes with applications in finance». *Mathematical Finance*, 9, p. 183-201.

SPIVAK, G.; CVITANIĆ, J. (1999). «Maximizing the probability of a perfect hedge». *Annals of Applied Probability*, 9, p. 1303-1328.